

## Auszug aus Investitionsrechnung: Dynamische Verfahren

### Was Sie in diesem Dokument erfahren

Grundlegendes .....	2
Übertragung von Zahlungen .....	2
Die finanzmathematischen Tabellen .....	3
Erläuterung des Kalkulationsfaktors .....	4
Dynamische Investitionsrechnungen .....	8
Finanzmathematische Begriffe .....	8
Barwert.....	9
Endwert .....	10
Jahreswert.....	10

## Grundlegendes

Eine wichtige Rolle kommt in der Finanzmathematik dem Faktor Zeit zu. Dies gilt vor allem für die dynamischen Verfahren der Investitionsrechnung. Eine Rente oder eine Kapitaltilgung für ein aufgenommenes Darlehen ist aus Sicht der Finanzmathematik eine Zahlungsreihe, bei der es zu unterschiedlichen Zeitpunkten Ein- und/oder Auszahlungen gibt.

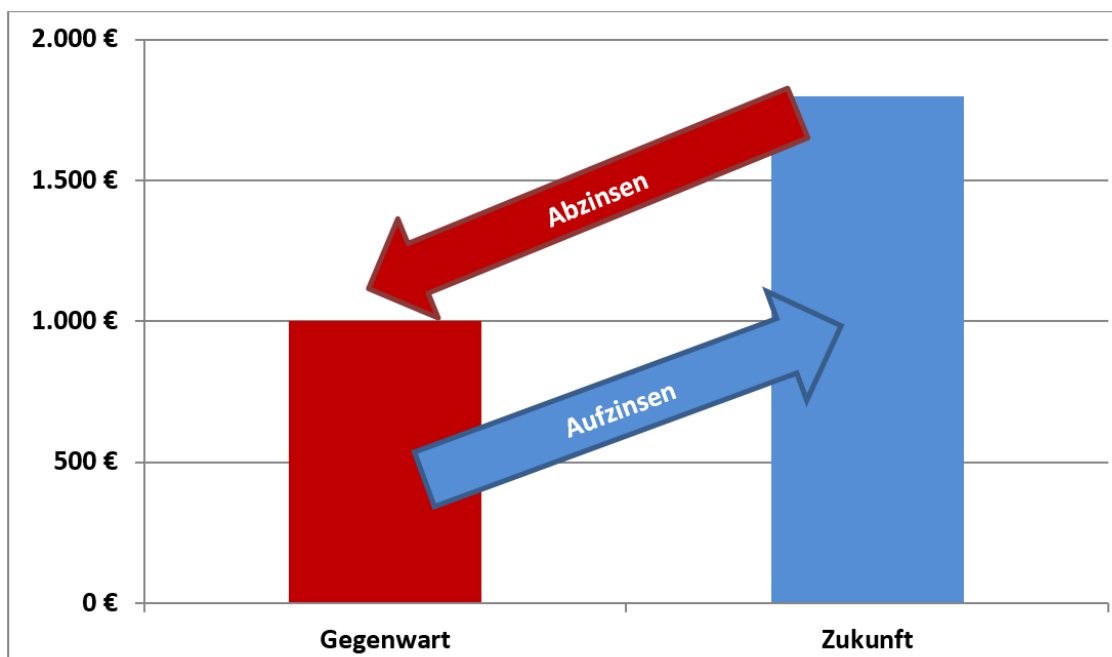
Diese können nicht einfach addiert werden, weil einige Faktoren berücksichtigt werden müssen. So z. B. die Frage, wann die regelmäßigen Ein- bzw. Auszahlungen auftreten:

Zahlung zum 1. eines Monats	Zahlung zur Monatsmitte	Zahlung zum Monatsletzten (ultimo)
Vorschüssige Zahlung zu Beginn des Zeitraums	Mittelschüssige Zahlung in der Mitte des Zeitraums	Nachschüssige Zahlung zum Ende eines Zeitraums
Beispiel: Mieten	Beispiel: Gehälter	Beispiel: Kreditzinsen

## Übertragung von Zahlungen

Werden Zahlungen für die Zukunft geleistet, möchten wir natürlich wissen, welchen Wert die Zahlungen am Ende haben werden (Endwert). Deshalb rechnen wir die zu erwartenden bzw. vereinbarten Zinsen mit hinzu. Diesen Vorgang nennt man Aufzinsen.

Geht man hingegen von einem bestimmten Zukunftswert (Endwert) aus, möchten wir natürlich wissen, welchem Barwert dies in der Gegenwart hat. Diesen Vorgang nennt man Abzinsen.



## Die finanzmathematischen Tabellen

Um bei allen möglichen Arten von Zahlungsvorgängen und Berechnungen der Investitionsvorhaben verbindliche Grundlagen zur Verfügung zu haben, gibt es die sog. Finanzmathematischen Tabellen. In der IHK-Prüfung sind diese in der IHK-Formelsammlung ab Seite 44 zu finden. Diese sehen dann beispielsweise so aus:

6% n	AuF	AbF	RVF	KWF	EWf	BWF
1	1,060000	0,943396	1,000000	1,060000	1,000000	0,943396
2	1,123600	0,889996	0,485437	0,545437	2,060000	1,833393
3	1,191016	0,839619	0,314110	0,374110	3,183600	2,673012
4	1,262477	0,792094	0,228591	0,288591	4,374616	3,465106
5	1,338226	0,747258	0,177396	0,237396	5,637093	4,212364
6	1,418519	0,704961	0,143363	0,203363	6,975319	4,917324
7	1,503630	0,665057	0,119135	0,179135	8,393838	5,582381
8	1,593848	0,627412	0,101036	0,161036	9,897468	6,209794
9	1,689479	0,591898	0,087022	0,147022	11,491316	6,801692
10	1,790848	0,558395	0,075868	0,135868	13,180795	7,360087

Beispiel aus IHK-Formelsammlung Seite 46, Zinssatz 6%, Dauer n = 10 Jahre.

Entweder werden die dargestellten Zinssätze in Rechenaufgaben benötigt, oder es soll überprüft werden, ob man die Werte aus der richtigen Tabelle auswählt.

Aufzinsungsfaktor (AuF)	$q^n$	=	$(1 + i)^n$
Abzinsungsfaktor (AbF)	$\frac{1}{q^n}$	=	$\frac{1}{(1 + i)^n}$
Restwertverteilungsfaktor (RVF)	$\frac{q - 1}{q^n - 1}$	=	$\frac{i}{(1 + i)^n - 1}$
Kapitalwiedergewinnungs-/ Annuitätenfaktor (KWF)	$\frac{q^n (q - 1)}{q^n - 1}$	=	$\frac{i \cdot (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$
Endwertfaktor (EWf)	$\frac{q^n - 1}{q - 1}$	=	$\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$
Barwertfaktor (BWF)/ Diskontierungssummenfaktor (DSF)	$\frac{q^n - 1}{q^n (q - 1)}$	=	$\frac{(1 + i)^n - 1}{i \cdot (1 + i)^n}$

In den IHK-Tabellen (IHK-Formelsammlung, Seite 43) sind auch die Formeln zur Berechnung der Faktoren angegeben. Es wird jedoch nicht verlangt, dass Sie diese Formeln beherrschen.

## Erläuterung des Kalkulationsfaktors

Bei einem Faktor handelt es sich um eine Dezimalzahl, die mit einem bestimmten Grundwert multipliziert werden kann. Dadurch verändert sich der Wert der Ausgangszahl. Der Faktor wird mit  $q$  bezeichnet.

Beispiel:

Der Zinssatz  $i$  beträgt beispielsweise  $6\% = 6$  von Hundert  $= 6/100 = 0,06$ .

$$6\% = \frac{6}{100} = 0,06$$

Da der Faktor  $q = 1 + i$  definiert wird ergibt sich daraus:  $100\% + 6\% = 106\%$ . Der Faktor wird jedoch in Dezimalstellen ausgedrückt, also  $1 + 0,06 = 1,06$ . Alle Faktoren werden grundsätzlich mit 6 Nachkommastellen angegeben, also schreiben wir  $1,060000$ .

$$n = 1, \text{ im ersten Jahr} \quad (1 + i)^1 = q^1 = 1,060000$$

$$n = 2, \text{ nach 2 Jahren} \quad (1 + i)^2 = q^2 = 1,060000^2 = 1,123600$$

$$n = 3, \text{ nach 3 Jahren} \quad (1 + i)^3 = q^3 = 1,060000^3 = 1,191016$$

Die Abzinsung erfolgt genau umgekehrt, denn die Abzinsung ist genau der Umkehrwert der Aufzinsung:

$$(1 + i)^{-n} = \frac{1}{(1 + i)^n} \text{ oder } q^{-n} = \frac{1}{q^n} = \frac{1}{(1 + i)^n}$$

Sofern Faktoren mehr als 6 Nachkommastellen aufweisen, werden diese trotzdem mit 6 Nachkommastellen angegeben. Es können also Rundungsdifferenzen auftreten.

Nachfolgend die Erklärung der Begriffe, die in o.g. Tabelle aufgeführt sind.

AuF	AbF	RVF	KWF	EWf	BWF
-----	-----	-----	-----	-----	-----

Zu erläutern sind die Begriffe für

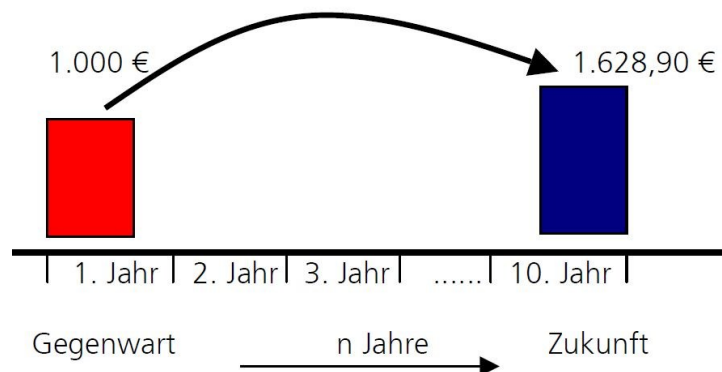
AuF	Aufzinsungsfaktor
AbF	Abzinsungsfaktor (Kehrwert von AuF)
RVF	Restwertverteilungsfaktor
KWF	Kapitalwiedergewinnungsfaktor
EWf	Endwertfaktor (Kehrwert von RVF)
BWF	Barwertfaktor (Kehrwert von KWF)

Üblicherweise wird immer diese Reihenfolge eingehalten.

### AuF

#### Aufzinsungsfaktor

$$q^n = (1 + i)^n$$



Zinst einen in der Gegenwart anfallenden Geldbetrag mit Zinsen und Zinseszinsen auf einen in der Zukunft liegenden Geldbetrag (Endwert) auf.

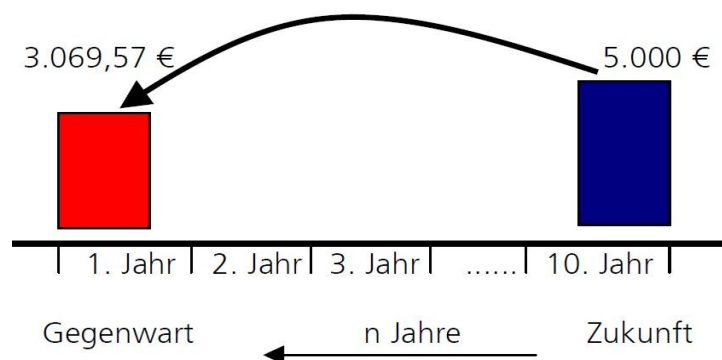
Firma X legt heute 1.000 € fest an und will wissen, welchen Betrag sie bei 5%-iger Verzinsung p.a. in 10 Jahren zurück erhält. Der Aufzinsungsfaktor beträgt 1,628895, demnach ergeben sich 1.628,90 €.

### AbF

#### Abzinsungsfaktor

$$\frac{1}{q^n} = (1 + i)^{-n}$$

Reziprokwert von AuF



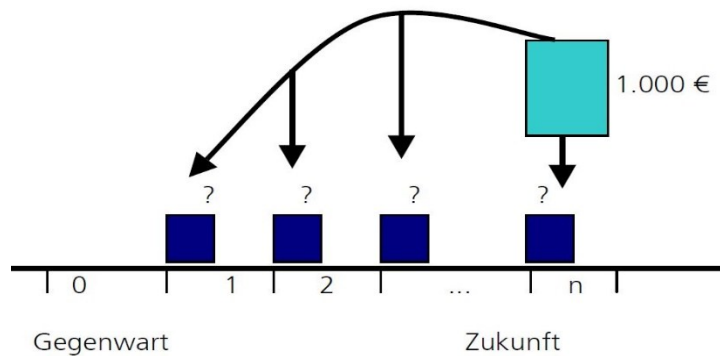
Zinst einen in der Zukunft fälligen Geldbetrag mit Zinsen und Zinseszinsen auf einen in der Gegenwart liegenden Geldwert (Barwert) ab.

Firma X plant in 10 Jahren die Anschaffung einer Maschine in Höhe von 5.000 € und will berechnen, welcher Betrag bei 5%-iger Verzinsung p.a. angelegt werden muss. Der Abzinsungsfaktor beträgt 0,613913, demnach beläuft sich der Betrag auf 3.069,57 €.

### RVF

#### Restwertverteilungsfaktor

$$\frac{q-1}{q^n-1} = \frac{i}{(1+i)^n-1}$$



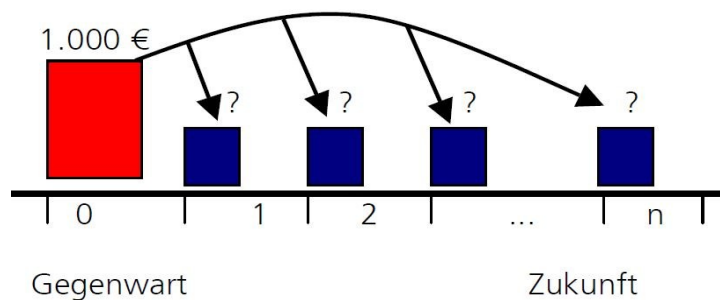
Wandelt eine Einmalzahlung, die in Zukunft anfällt in eine Zahlungsreihe um. Ein in der Zukunft als Einmalzahlung anfallender Geldbetrag wird unter Berücksichtigung von Zinsen und Zinseszinsen in gleich große Teilbeträge einer Zahlungsreihe umgewandelt.

In 5 Jahren sollen 1.000 € bei einem Zinssatz von 6% angespart sein. Der Restwertverteilungsfaktor RVF beträgt 0,177396, somit sind jährlich 177,40 € zu sparen (Rundung!).

### KWF

#### Kapitalwiedergewinnungsfaktor

$$\frac{q^n(q-1)}{q^n-1} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$$



Eine Zahlung der Gegenwart soll in eine Zahlungsreihe, also mehrere zukünftiger und gleich hohe Teilbeträge zerlegt werden. Es entstehen damit Annuitäten, also Jahreszahlungen in gleicher Höhe.

Die Firma X finanziert die Anschaffung einer Maschine mit einem Kredit von 1.000 € zu einem Zinssatz von 6%. Gesucht wird der pro Periode (Jahr) zu zahlende Kapitaldienst für einen Zeitraum von 5 Jahren (Summe aus Tilgung und Zinsen). KWF = 0,237396 = Annuität (jährlicher Betrag) 1.000 € · 0,237396 = 237,40 €.

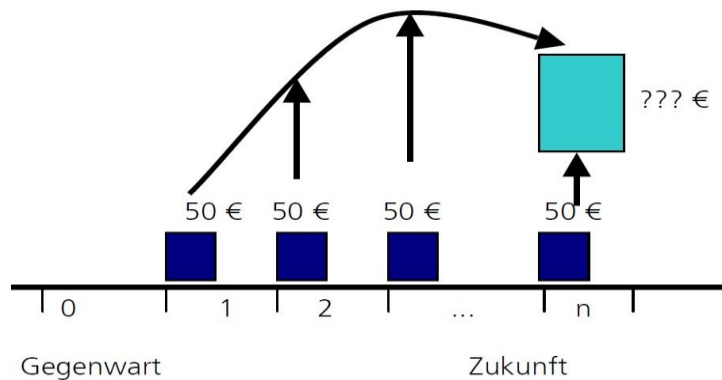
Gesamtzahlung an die Bank: 1.187 €, davon Zinsen 187 €.

### EWf

#### Endwertfaktor

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Reziprokwert von RVF.



Wandelt mehrere zukünftige Teilbeträge (Zahlungsreihe) in eine in der Zukunft liegende Einmalzahlung um (Aufzinsungssummenfaktor, Rentenendwertfaktor).

Für die Altersversorgung der Mitarbeiterstamms leistet ein Unternehmen jährlich einen Betrag von 50.000 € in die Pensionsrückstellungen. Es wird eine durchschnittliche Verzinsung von 6% p.a. erwartet. Wie hoch ist der erreichte Endwert nach 10 Jahren?

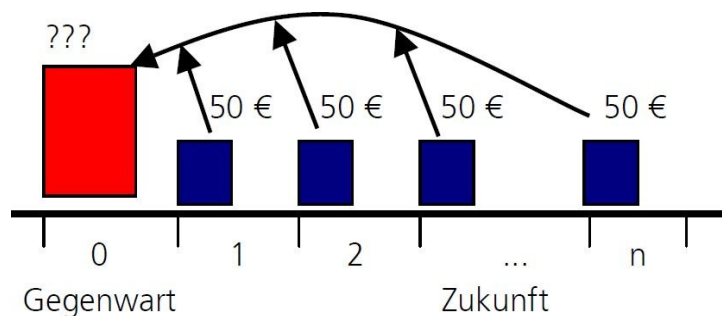
EWf = 13,180795. Damit ist ein Kapitalbetrag von  $50.000 \text{ €} \cdot 13,180795 = 659.039,75 \text{ €}$  erreicht.

### BWf

#### Barwertfaktor

$$\frac{q^n - 1}{q(q - 1)} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i(1 + i)^n}$$

Reziprokwert von KWF.



Wandelt mehrere zukünftig anfallende, gleiche Teilbeträge (Zahlungsreihe) in eine Zahlung in der Gegenwart um.

Die Firma X erwartet bei einem Investitionsvorhaben durchschnittliche Überschüsse in Höhe von 10.000 € jährlich. Der Investitionszeitraum beträgt 5 Jahre, die Verzinsung soll 6% betragen. Welche Summe kann für das Investitionsvorhaben (Barwert) jetzt eingesetzt werden?

BWf = 4,212364; Berechnung:  $10.000 \text{ €} \cdot 4,212364 = 42.123,64 \text{ €}$  können investiert werden.

## Dynamische Investitionsrechnungen

Dynamische Investitionsrechnungen basieren anders als statische Investitionsrechnungen auf Ein- und Auszahlungen und bedienen sich finanzmathematischer Methoden. Bei der Ermittlung der Auszahlungen bleiben Zinsen unberücksichtigt, da durch die Dynamisierung bereits eine Abzinsung erfolgt. Nahfolgend werden die finanzwirtschaftlichen Begriffe Barwert, Endwert und Jahreswert erläutert.

### Finanzmathematische Begriffe

Nachfolgend werden die Begriffe

- Barwert
- Endwert
- Jahreswert

mit jeweils zwei passenden Beispielen erläutert.

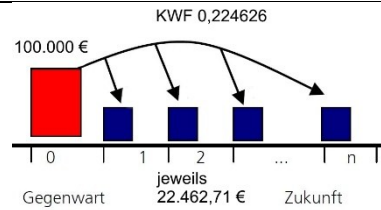
Beispiel	Begriff	Faktor	
<b>Beispiel Nr. 12</b>	Barwert	Abzinsungsfaktor AbF	
<b>Beispiel Nr. 13</b>	Barwert	Barwertfaktor BWF	
<b>Beispiel Nr. 14</b>	Endwert	Aufzinsungsfaktor AuF	
<b>Beispiel Nr. 15</b>	Endwert	Endwertfaktor EWF	



**Beispiel Nr. 16**

Jahreswert

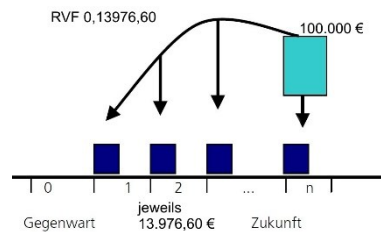
Kapitalwiedergewinnungs-  
faktor KWF



**Beispiel Nr. 17**

Jahreswert

Restwertverteilungsfak-  
tor RVF



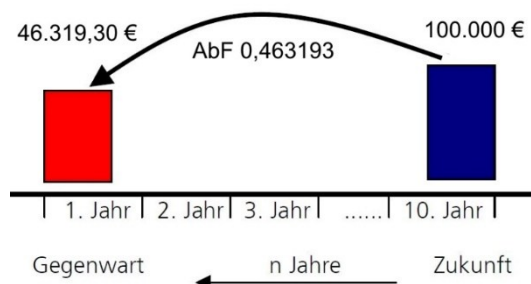
**Barwert**

Die Beispiele Nr. 12 bis Nr. 17 gehen nach dem Motto „Ein Unternehmen geht zur Bank...“.

**Beispiel Nr. 12:**

Barwert mit Abzinsungsfaktor AbF

Ein Unternehmen geht zur Bank und möchte in 10 Jahren über einen Betrag von 100 T€ verfügen. Für welchen Betrag muss das Unternehmen Wertpapiere erwerben, wenn die Bank eine Verzinsung von 8% pro Jahr zuzagt.

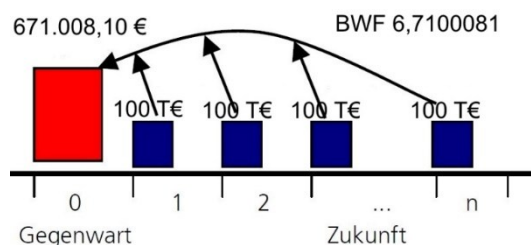


$$K_0 = 100.000 \text{ €} \cdot 0,463193 = 46.319,30 \text{ €}$$

**Beispiel Nr. 13:**

Barwert mit Barwertfaktor BWF

Ein Unternehmen geht zur Bank, diese bietet dem Unternehmen eine Firmenbeteiligung über 10 Jahre an. Dabei sollen dem Unternehmen jährlich 100.000 € gutgeschrieben werden. Als Verzinsung sind 8% zugesichert. Wieviel muss das Unternehmen einsetzen?



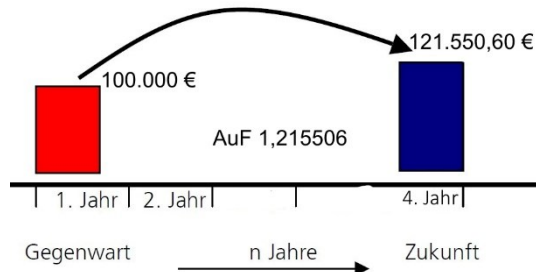
$$K_0 = 100.000 \text{ €} \cdot 6,710081 = 671.008,10 \text{ €}$$

## Endwert

### Beispiel Nr. 14:

Endwert mit Aufzinsungsfaktor AuF

Ein Unternehmen geht zur Bank und tätigt eine Geldanlage von 100.000 € zu einem Zinssatz von 5%. Die Zinsen für die gesamte Laufzeit sowie das investierte Kapital sollen nach 4 Jahren ausbezahlt werden. Wie hoch ist der Endwert?

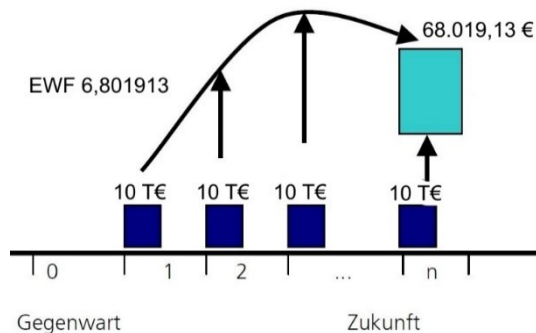


$$K_4 = K_0 \cdot q^4 = 100.000 \text{ €} \cdot 1,215506 = 121.550,60 \text{ €}$$

### Beispiel Nr. 15:

Endwert mit Endwertfaktor EWF

Ein Unternehmen geht zur Bank und vereinbart einen Sparplan. Dabei sollen sechs Jahre lang jeweils 10.000 € jährlich einbezahlt werden. Die Bank gibt 5% Zinsen. Das Kapital und die Zinsen werden am Ende des sechsten Jahres ausbezahlt. Wie hoch ist der Endwert?



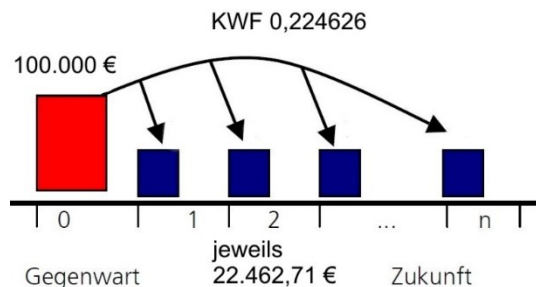
$$K_6 = 10.000 \text{ €} \cdot 6,801913 = 68.019,13 \text{ €}$$

## Jahreswert

### Beispiel Nr. 16:

Jahreswert mit Kapitalwiedergewinnungsfaktor KWF

Ein Unternehmen geht zur Bank und benötigt ein Darlehen über 100.000 €. Die Laufzeit beträgt 5 Jahre. Die Bank nimmt 4% Zinsen. Welchen jährlichen Kapitaldienst muss das Unternehmen leisten?



$$e = 100.000 \text{ €} \cdot 0,224627 = 22.462,70 \text{ €}$$

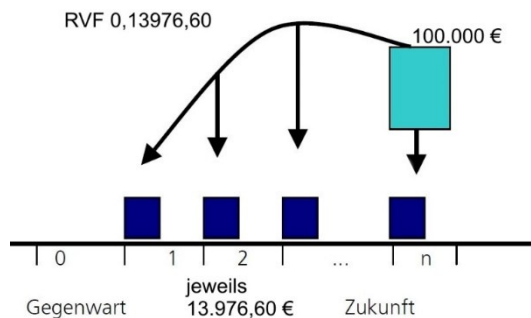
Tilgungsbetrag: 100.000,00 €  
Zinszahlungen: 12.313,50 €

### Beispiel Nr. 17:

#### Jahreswert mit Restwertverteilungsfaktor RVF

Ein Unternehmen geht zur Bank und möchte in sechs Jahren einen Betrag von 100.000 € ansparen. Man einigt sich auf einen Zinssatz von 7% p.a. Welche jährlichen Sparraten muss das Unternehmen leisten?

$$e = 100.000 \text{ €} \cdot 0,139796 = 13.979,60 \text{ €}$$



Hinweis: Diese Beispiele können, teilweise so ähnlich, auch in der Broschüre „5 vor Finanzmanagement“ nachgelesen werden und sind dort auf Seite 80 bis 82 zu finden.

Mit welchen Faktoren müssen Sie in IHK-Prüfungen am häufigsten rechnen?

AuF	AbF	RVF	KWF	EWf	BWF
4	1		2		3

#### 1. Abzinsungsfaktor AbF

Der AbF ist der Reziprokwert/Kehrwert des Aufzinsungsfaktors AuF. Meist in der Berechnung nach der Kapitalwertmethode mit unterschiedlichen Ein- und Auszahlungen/Überschüssen während des Investitionszeitraums.

#### 2. Kapitalwiedergewinnungsfaktor KWF

Mit dem KWF werden Annuitäten berechnet.

#### 3. Barwertfaktor BWF

Der BWF ist der Reziprokwert/Kehrwert des KWF und taucht entweder in Aufgaben rund um die Annuität oder aber in der Kapitalwertmethode bei jährlich gleichbleibenden Überschüssen auf.

#### 4. Aufzinsungsfaktor Auf

Der Auf berechnet Aufzinsungen über entsprechende Zeiträume und ist damit der Reziprokwert/Kehrwert des AbF.